

# ТЕПЛОФИЗИКА ПРОЦЕССОВ ОБРАБОТКИ В МАШИНОСТРОЕНИИ

$$E_{\text{зап}} \sim m \sim V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow E_{\text{зап}} \sim R^3$$

$$E_{\text{расх}} \sim S = 4\pi R^2 \Rightarrow E_{\text{расх}} \sim R^2$$

$$\frac{E_{\text{расх}}}{E_{\text{зап}}} \sim \frac{1}{R}$$

Способы передачи теплоты в технологических системах:

- теплопроводность
- конвекция
- излучение

## ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ

Характеристики:

- количество теплоты  $Q$  (Дж)
- тепловая мощность  $W$  (Вт)

$$W = \frac{dQ}{dt} \quad (1.1)$$

Если теплота  $Q$  в течение времени  $t$  выделяется равномерно, то

$$W = \frac{Q}{t} \quad (1.2)$$

- тепловой поток  $q$  (Вт/м<sup>2</sup>)

$$q = \frac{dW}{dF} \quad (1.3)$$

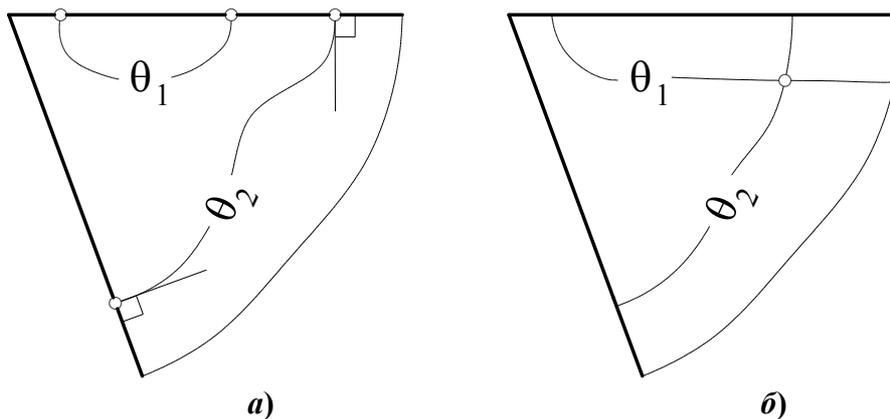
Если теплота  $Q$  равномерно распределена по сечению  $F$ , то

$$q = \frac{Q}{t \cdot F} = \frac{W}{F} \quad (1.4)$$

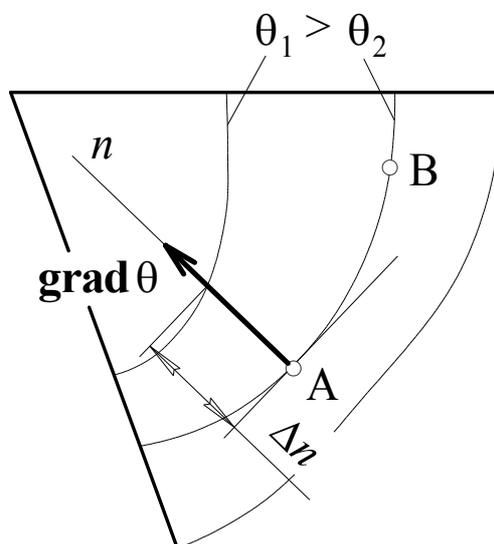
- температура  $\theta$  (°С или К)

**Таблица 1.1. Виды температурных полей**

	Нестационарное	Стационарное
Трёхмерное	$\theta_{3н} = F(x, y, z, t)$	$\theta_{3с} = f(x, y, z)$
Двумерное	$\theta_{2н} = F(x, y, t)$	$\theta_{2с} = f(x, y)$
Одномерное	$\theta_{1н} = F(x, t)$	$\theta_{1с} = f(x)$



**Рис. 1.1. Свойства изотермических поверхностей**



**Рис. 1.2. К понятию градиента температуры**

Средний градиент температуры

$$\overline{\text{grad } \theta} = \frac{\theta_1 - \theta_2}{\Delta n} = \frac{\Delta \theta}{\Delta n}, \text{ } ^\circ\text{C/м} \quad (1.5)$$

$$\text{grad } \theta = \lim_{\Delta n \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta n} = \frac{\partial \theta}{\partial n}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{grad}_x \theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \text{grad}_y \theta &= \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \text{grad}_z \theta &= \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbf{grad } \theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \mathbf{k}$$

## 1. Закон Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \cdot \mathbf{grad } \theta, \quad (1.6)$$

где  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности

$$[\lambda] = \frac{[q]}{[\text{grad } \theta]} = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2} \cdot \frac{^\circ\text{C}}{\text{м}} = \text{Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C})$$

$$\lambda = f(\theta) \neq \text{const}$$

$$\lambda(\theta) = \lambda_0 + k \cdot \theta$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda(\theta_1) + \lambda(\theta_2)}{2} = \text{const}$$

$$q = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial n}$$

Для одномерного температурного поля

$$q = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Rightarrow \partial \theta = -\frac{q}{\lambda} \partial x$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \partial \theta = -\frac{q}{\lambda} \int_{x_1}^{x_2} \partial x$$

$$\theta_2 - \theta_1 = -\frac{q}{\lambda} (x_2 - x_1)$$

$$\theta_2 = \theta_1 - \frac{q}{\lambda} (x_2 - x_1) \quad (1.7)$$

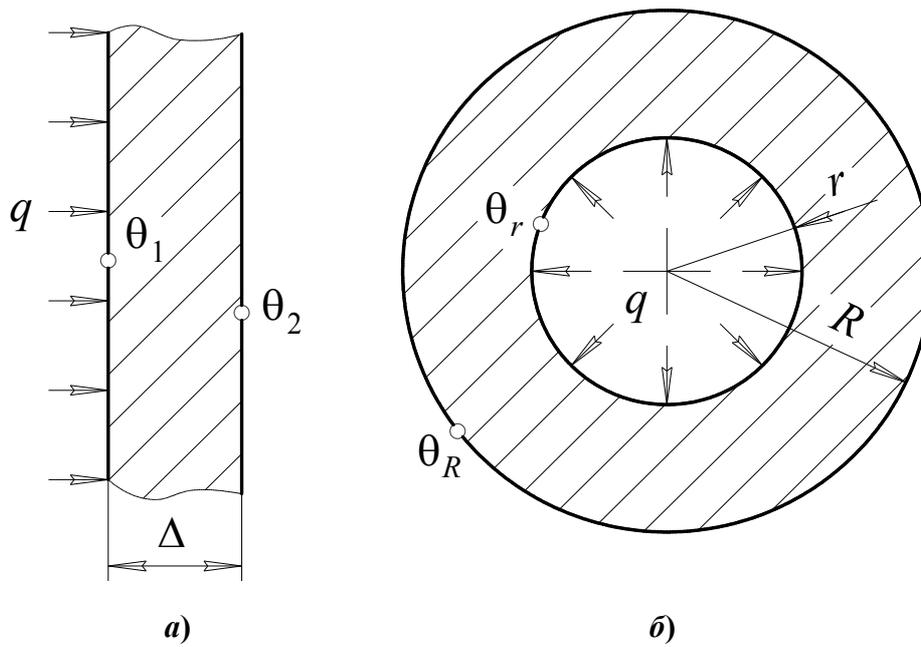


Рис. 1.3. Плоская (а) и цилиндрическая (б) стенки

Закон Фурье для плоской стенки

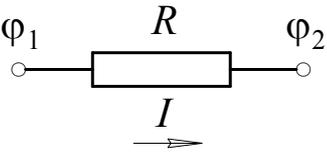
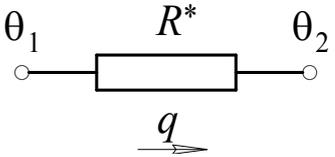
$$q = \frac{\lambda}{\Delta} (\theta_1 - \theta_2) \quad (1.8)$$

Закон Фурье для цилиндрической стенки

$$q = \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\theta_r - \theta_R}{\ln(R/r)} \quad (1.9)$$

## Тепловые цепи

**Таблица 1.2. Электрические и тепловые цепи. Аналоги параметров**

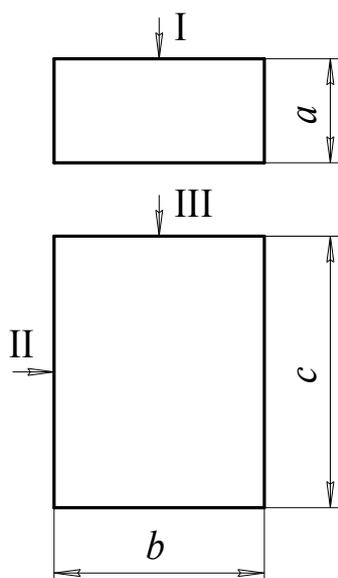
			
Параметр электрической цепи		Параметр тепловой цепи	
наименование, обозначение	размерность	наименование, обозначение	размерность
Сила тока, $I$	А	Тепловой поток, $q$	Вт/м <sup>2</sup>
Электрический потенциал, $\varphi$	В	Температура, $\theta$	°С
Электрическое сопротивление, $R$	Ом	Термическое сопротивление, $R^*$	°С/Вт

Термическое сопротивление

$$R^* = \frac{l}{\lambda \cdot F}, \quad (1.10)$$

где  $l$  – характерный размер (наибольший размер в направлении вектора теплового потока);  $F$  – наибольшее сечение, перпендикулярное вектору  $\mathbf{q}$

$$[R^*] = \frac{1}{[\lambda]} \cdot \frac{[l]}{[F]} = \frac{\text{м} \cdot \text{°С}}{\text{Вт}} \cdot \frac{\text{м}}{\text{м}^2} = \text{°С/Вт}$$



$$R_{\text{I}}^* = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{a}{bc}$$

$$R_{\text{II}}^* = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{b}{ac}$$

$$R_{\text{III}}^* = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{c}{ab}$$

$$R_{\text{I}}^* < R_{\text{II}}^* < R_{\text{III}}^*$$

**Рис. 1.4. «Анизотропность» термического сопротивления**

## Суммарное термическое сопротивление тепловой цепи

- при последовательном соединении элементов

$$R_{\Sigma}^* = \sum_{i=1}^n R_i^* \quad (1.11)$$

- при параллельном соединении элементов

$$\frac{1}{R_{\Sigma}^*} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i^*} \quad (1.12)$$

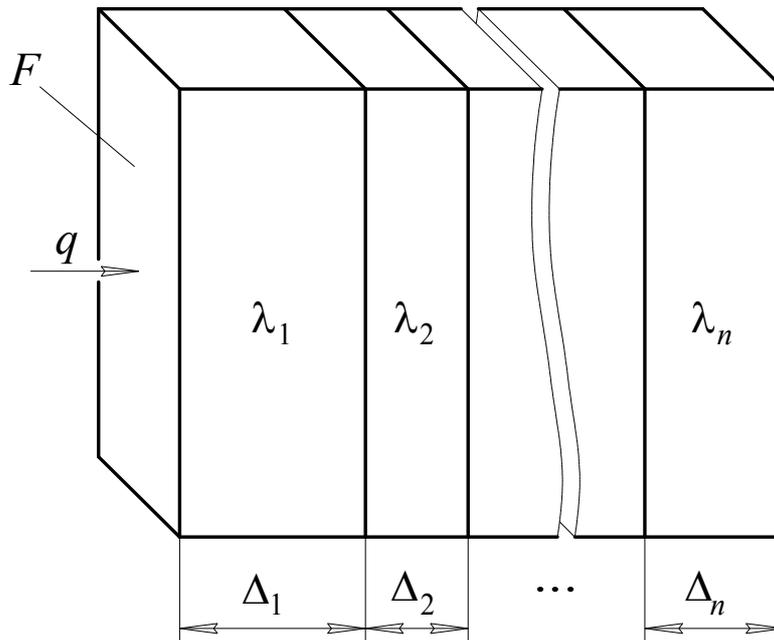


Рис. 1.5. Многослойная плоская стенка

$$R_{\Sigma}^* = \sum_{i=1}^n R_i^* = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{\lambda_i F} = \frac{1}{F} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{\lambda_i}$$

$$R_{\Sigma}^* = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i}{\lambda_{\text{ЭКВ}} F}$$

Эквивалентная теплопроводность многослойной плоской стенки

$$\lambda_{\text{ЭКВ}} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\Delta_i}{\lambda_i}} \quad (1.13)$$

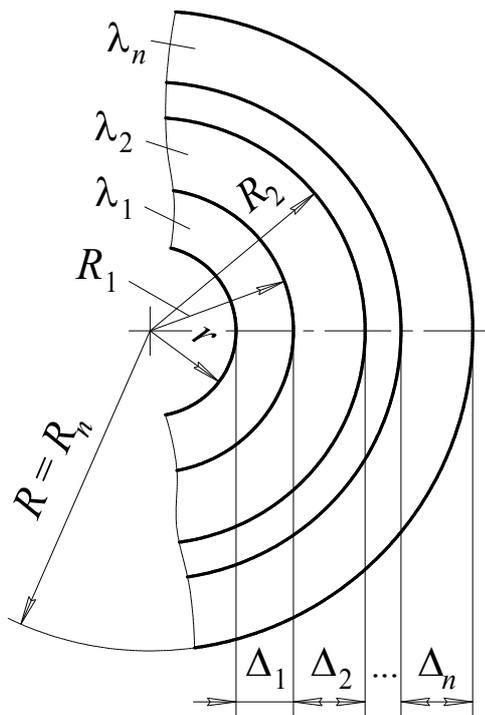


Рис. 1.6. Многослойная цилиндрическая стенка

Эквивалентная теплопроводность многослойной цилиндрической стенки

$$\lambda_{\text{ЭКВ}} = \frac{\ln(R/r)}{\sum_{i=1}^n \frac{\ln(1 - \varepsilon_i)}{\lambda_i}} \quad (1.14)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta_i}{R_i} \quad (1.15)$$

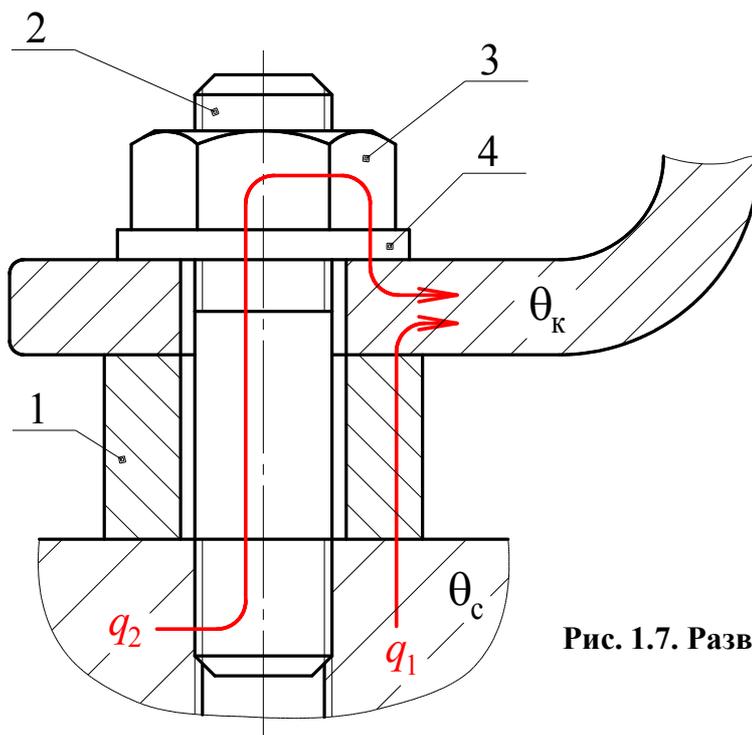


Рис. 1.7. Разветвлённая тепловая цепь

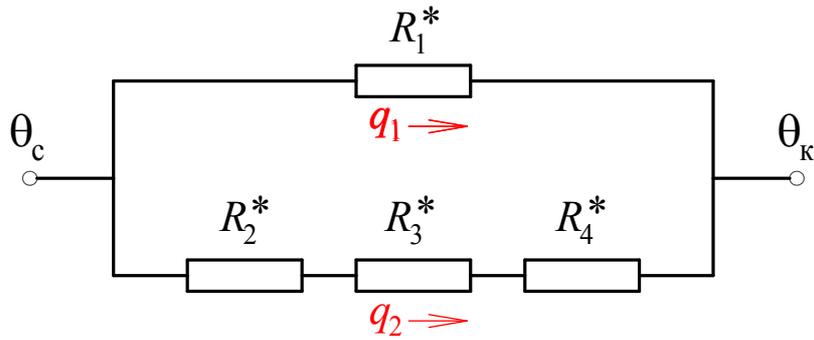


Рис. 1.8. Принципиальная схема тепловой цепи с рис. 1.7

$$\frac{1}{R_{\Sigma}^*} = \frac{1}{R_1^*} + \frac{1}{R_2^* + R_3^* + R_4^*}$$

Эквивалентная теплопроводность композитных материалов

$$\lambda_{\text{ЭКВ}} = \lambda_1^{p_1} \cdot \lambda_2^{p_2} \cdot \dots \cdot \lambda_n^{p_n} \quad (1.16)$$

$p_i$  – доля отдельной фракции в общем объеме материала

## 2. Дифференциальное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{1}{c\rho} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \right), \quad (2.1)$$

где  $c$  – удельная теплоёмкость, Дж/(кг·°С);  $\rho$  – плотность материала, кг/м<sup>3</sup>

При  $\lambda = \text{const}$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c\rho} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) \quad (2.2)$$

Коэффициент температуропроводности

$$\omega = \frac{\lambda}{c\rho} \quad (2.3)$$

$$[\omega] = \frac{[\lambda]}{[c] \cdot [\rho]} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{С}} : \left( \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{С}} \cdot \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} \right) = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{С}} : \frac{\text{Дж}}{\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{С}} = \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot ^\circ\text{С}} \cdot \frac{\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{С}}{\text{Вт} \cdot \text{с}} = \text{м}^2/\text{с}$$

$$\omega = f(\theta) \neq \text{const}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\omega(\theta_1) + \omega(\theta_2)}{2} = \text{const}$$

**Таблица 2.1. Формы дифференциального уравнения теплопроводности**

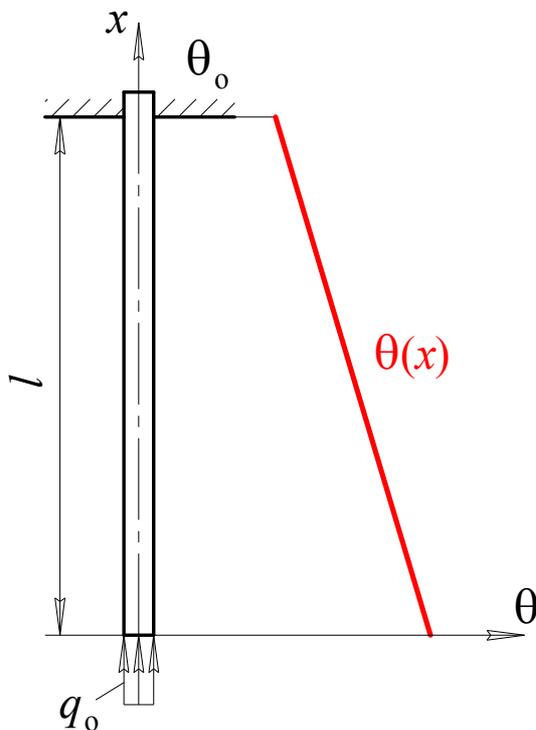
Мерность тепловой задачи	Температурное поле	
	Нестационарное	Стационарное
Трёхмерная	$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \omega \cdot \nabla^2 \theta$	$\nabla^2 \theta = 0$
Двумерная	$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \omega \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right)$	$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$
Одномерная	$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \omega \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$	$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0$

Одномерная стационарная задача

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = C_1 \Rightarrow \partial \theta = C_1 \partial x$$

$$\int \partial \theta = C_1 \int \partial x$$

$$\theta(x) = C_1 x + C_2 \quad (2.4)$$



$$\begin{cases} x=0 \\ q(0) = q_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=l \\ \theta(l) = \theta_0 \end{cases}$$

$$q = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \theta}{\partial x} = C_1 = -\frac{q_0}{\lambda}$$

$$\theta(l) = C_1 l + C_2 \Rightarrow C_2 = \theta_0 + \frac{q_0 l}{\lambda}$$

$$\theta(x) = -\frac{q_0 x}{\lambda} + \theta_0 + \frac{q_0 l}{\lambda}$$

$$\theta(x) = \frac{q_0}{\lambda} (l - x) + \theta_0 \quad (2.5)$$

**Рис. 2.1. Одномерная тепловая задача**

## Условия однозначности

- начальные условия
- граничные условия
- параметры источника (стока) теплоты
- параметры твердого тела

Начальные условия

$$\theta(x, y, z, 0)$$

$$\theta(x, y, z, 0) = \theta_0 = \text{const}$$

Граничные условия:

- ГУ-1

$$\theta(x_s, y_s, z_s, \tau)$$

$$\theta(x_s, y_s, z_s, \tau) = \theta_s = \text{const}$$

- ГУ-2

$$q(x_s, y_s, z_s, \tau)$$

$$q(x_s, y_s, z_s, \tau) = 0$$

- ГУ-3

Закон Ньютона-Рихмана

$$q_s = \alpha(\theta_s - \theta_0) \quad (2.6)$$

$$[\alpha] = \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С}} - \text{коэффициент теплоотдачи}$$

- ГУ-4

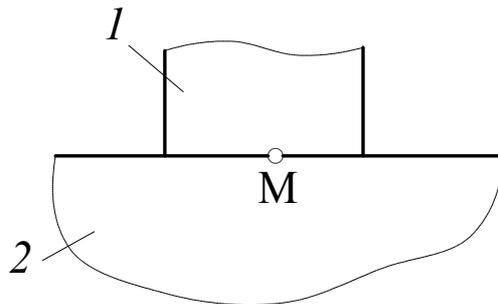


Рис. 2.2. О граничных условиях 4 рода

1 гипотеза

$$\theta_{M1} = \theta_{M2}$$

2 гипотеза

$$\theta_1^{\max} = \theta_2^{\max}$$

3 гипотеза

$$\theta_1^{\text{cp}} = \theta_2^{\text{cp}}$$

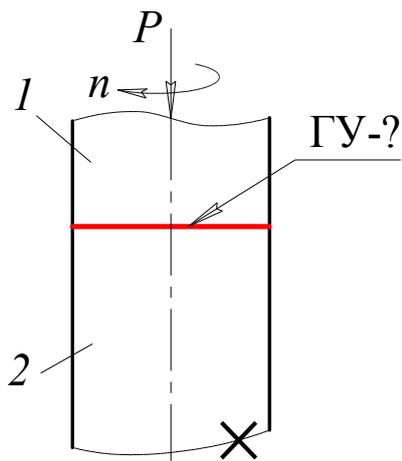


Рис. 2.3. К определению рода ГУ

### Кодирование тепловых задач

$$\pm \frac{\text{МКО}}{\text{Р.СД}} \text{ТУ}$$

*Мерность* источника (стока) теплоты

$$M = \begin{cases} 3 - \text{объемный} \\ 2 - \text{плоский} \\ 1 - \text{одномерный} \\ 0 - \text{точечный} \end{cases}$$

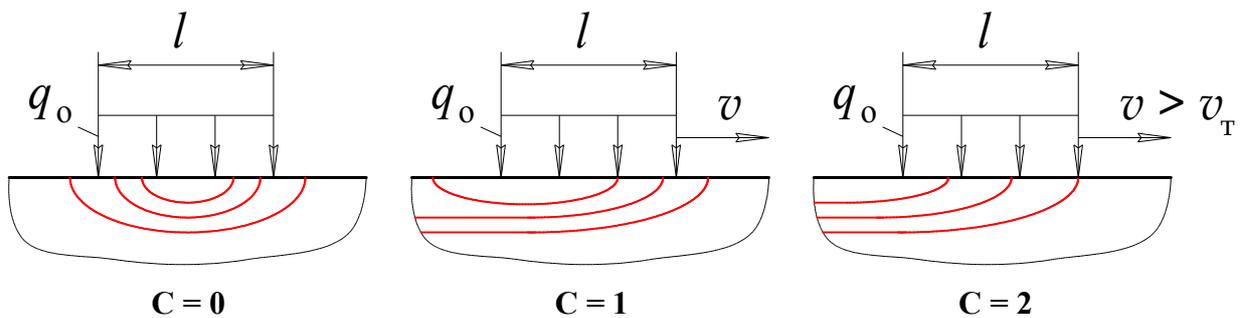
**Конфигурация** источника (стока) теплоты

$$K = \begin{cases} 0 - \text{точечный} \\ 1 - \text{прямой} \\ 2 - \text{круговой} \\ 3 - \text{шаровой} \end{cases}$$

**Ограниченность** источника (стока) теплоты

$$O = \begin{cases} 0 - \text{неограниченный / точечный} \\ 1 - \text{ограниченный по 1 оси} \\ 2 - \text{ограниченный по 2 осям} \\ 3 - \text{ограниченный по 3 осям} \end{cases}$$

- |        |         |         |         |
|--------|---------|---------|---------|
| 1) 000 | 2) 110  | 3) 211  | 4) 312  |
| 5) 010 | 6) 111  | 7) 212  | 8) 322  |
| 9) 001 | 10) 112 | 11) 221 | 12) 332 |
|        | 13) 100 | 14) 222 | 15) 333 |



**Рис. 2.4.** О скорости движения источника

**Критерий Пекле**

$$Pe = \frac{vl}{\omega} \tag{2.7}$$

$$[Pe] = \frac{M \cdot M}{c} : \frac{M^2}{c} \rightarrow \bar{b}/p$$

**Скорость** движения источника (стока) теплоты

$$C = \begin{cases} 0 - \text{неподвижный} (Pe \rightarrow 0) \\ 1 - \text{движущийся} (Pe < 10) \\ 2 - \text{быстродвижущийся} (Pe \geq 10) \end{cases}$$

Критерий Фурье

$$Fo = \frac{\omega\tau}{l^2} \quad (2.8)$$

$$[Fo] = \frac{m^2 \cdot c}{c} : m^2 \rightarrow \text{б/р}$$

**Длительность** действия источника (стока) теплоты

$$D = \begin{cases} 0 - \text{мгновенный} (Fo \rightarrow 0) \\ 1 - \text{неустановившийся процесс} (Fo < 100) \\ 2 - \text{установившийся процесс} (Fo \geq 100) \end{cases}$$

**Распределение** плотности тепловыделения источника

$$P = XYZ,$$

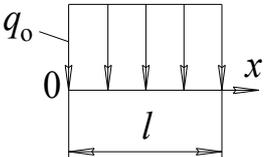
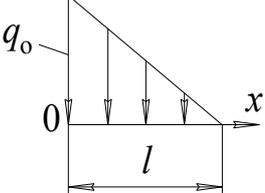
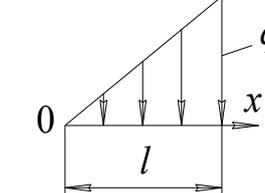
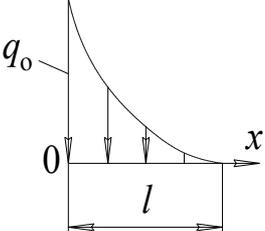
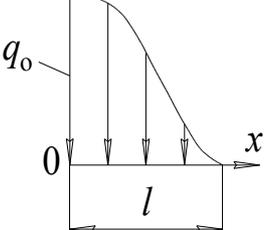
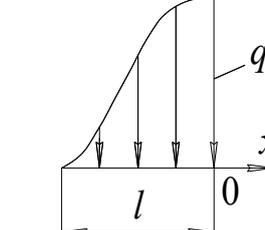
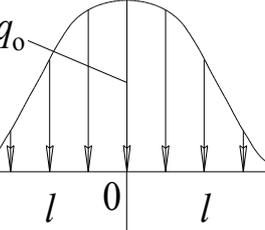
где X, Y, Z – распределение плотности тепловыделения по координатным осям

Если  $C \neq 0$ , ось X направляют по вектору скорости движения источника

Плотность тепловыделения

$$q = \frac{\partial W}{\partial M}$$
$$q = \begin{cases} \frac{dW(x_{и}, y_{и}, z_{и})}{dx_{и} dy_{и} dz_{и}}, \text{ Вт/м}^3 - \text{ при } M = 3 \\ \frac{dW(x_{и}, y_{и})}{dx_{и} dy_{и}}, \text{ Вт/м}^2 - \text{ при } M = 2 \\ \frac{dW(x_{и})}{dx_{и}}, \text{ Вт/м} - \text{ при } M = 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Таблица 2.2. Распределение плотности тепловыделения

Р	Наименование	Эскиз	Закон распределения плотности тепловыделения
100	Равномерно распределённый		$f(x_{и}) = 1$
200	Линейно распределённый		$f(x_{и}) = 1 - \frac{x_{и}}{l}$
300			$f(x_{и}) = \frac{x_{и}}{l}$
400	Экспоненциально распределённый		$f(x_{и}) = e^{-kx_{и}}$
500	Нормально распределённый		$f(x_{и}) = e^{-k_0 x_{и}^2}$ $x_{и} \in [0, l]$
600			$f(x_{и}) = e^{-k_0 x_{и}^2}$ $x_{и} \in [-l, 0]$
700			$f(x_{и}) = e^{-k_0 x_{и}^2}$ $x_{и} \in [-l, l]$

## Закон распределения плотности тепловыделения

$$f(x_{и}, y_{и}, z_{и}) = \frac{q(x_{и}, y_{и}, z_{и})}{q_0} \quad (2.10)$$

$q_0$  – максимальная плотность тепловыделения в пределах источника

$$f(x_{и}, y_{и}, z_{и}) = f(x_{и}) \cdot f(y_{и}) \cdot f(z_{и}) \quad (2.11)$$

Для линейно распределённого одномерного источника  $P = 200$  (табл. 2.2)

$$q(x_{и}) = Ax_{и} + B \quad (2.12)$$

При  $x_{и} = 0$   $q(0) = q_0 \Rightarrow B = q_0$

При  $x_{и} = l$   $q(l) = 0 \Rightarrow 0 = A \cdot l + q_0 \Rightarrow A = -\frac{q_0}{l}$

$$q(x_{и}) = q_0 \left( 1 - \frac{x_{и}}{l} \right) \Rightarrow f(x_{и}) = 1 - \frac{x_{и}}{l}$$

Для нормально распределённых одномерных источников (см. табл. 2.2)

$$q(x_{и}) = q_0 e^{-k_0 x_{и}^2} \quad (2.13)$$

$k_0$  – коэффициент сосредоточенности тепловыделения

Если  $q(l) = 0,05q_0$ , то  $e^{-k_0 l^2} = 0,05$

$$k_0 = \frac{3}{l^2}, \text{ м}^{-2} \quad (2.14)$$

## Расчет максимальной плотности тепловыделения

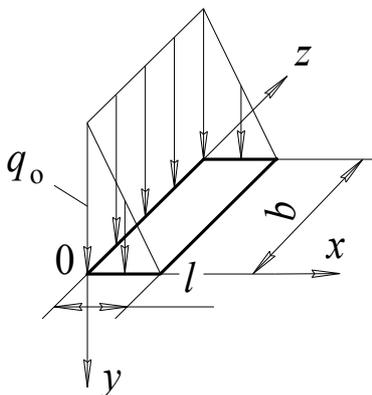


Рис. 2.5. К расчету  $q_0$

$$\bullet \text{ Источник } + \frac{212}{201} \text{ XX}$$

Из второго уравнения системы (2.9)

$$q(x_{и}, z_{и}) = \frac{dW}{dx_{и} dz_{и}} = q_0 f(x_{и}, z_{и})$$

С учетом (2.11)

$$dW = q_0 f(x_{и}) \cdot f(z_{и}) dx_{и} dz_{и}$$

$$\begin{aligned}
W &= \iint_F q_0 f(x_n) \cdot f(z_n) dx_n dz_n = q_0 \int_0^b f(z_n) dz_n \int_0^l f(x_n) dx_n = q_0 \int_0^b 1 \cdot dz_n \int_0^l \left(1 - \frac{x_n}{l}\right) dx_n = \\
&= q_0 b \left( \int_0^l dx_n - \frac{1}{l} \int_0^l x_n dx_n \right) = q_0 b \left( x_n - \frac{1}{l} \cdot \frac{x_n^2}{2} \right) \Big|_0^l = q_0 b \left( l - \frac{l}{2} \right) = \frac{q_0 b l}{2} \\
q_0 &= \frac{2W}{bl}, \text{ Вт/м}^2 \tag{2.12}
\end{aligned}$$

• Источник  $+\frac{111}{700.XX}XX$  (см. табл. 2.2)

$$q(x_n) = \frac{dW}{dx_n} = q_0 f(x_n) = q_0 e^{-k_0 x_n^2}$$

$$W = q_0 \int_{-l}^l e^{-k_0 x_n^2} dx_n$$

$$\int_{u_1}^{u_2} e^{-p^2 u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2p} (\text{erf}[pu_2] - \text{erf}[pu_1]) \tag{2.13}$$

$$\text{erf}[0] = 0; \text{erf}[+\infty] = 1; \text{erf}[-u] = -\text{erf}[u]$$

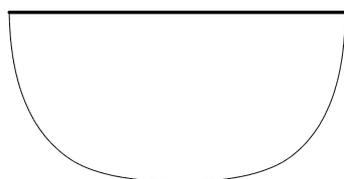
$$\text{erf}[z] = \sqrt{1 - e^{-1,26z^2}}$$

$$W = q_0 \int_{-l}^l e^{-k_0 x_n^2} dx_n = q_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k_0}} (\text{erf}[l\sqrt{k_0}] - \text{erf}[-l\sqrt{k_0}]) = q_0 \sqrt{\frac{\pi}{k_0}} \text{erf}[l\sqrt{k_0}]$$

$$q_0 = W \sqrt{\frac{k_0}{\pi}} (\text{erf}[l\sqrt{k_0}])^{-1}, \text{ Вт/м} \tag{2.14}$$

Форма твёрдого **тела**, на поверхности или в объеме которого действует источник (сток) теплоты:

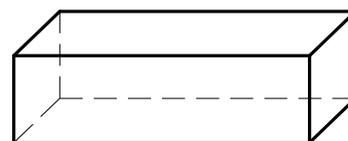
$$\Gamma = \begin{cases} 0 - \text{бесконечно большое тело (пространство)} \\ 1 - \text{полупространство} \\ 2 - \text{бесконечная пластина} \\ 3 - \text{параллелепипед} \\ \dots \text{ далее см. рис. 2.6} \end{cases}$$



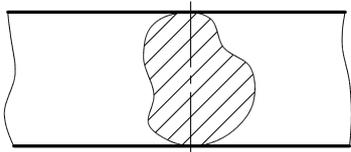
**T = 1**  
полупространство



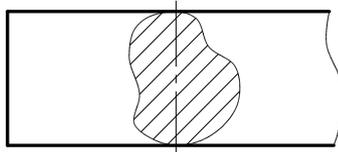
**T = 2**  
бесконечная пластина



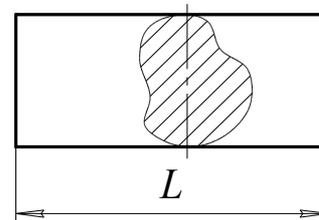
**T = 3**  
параллелепипед



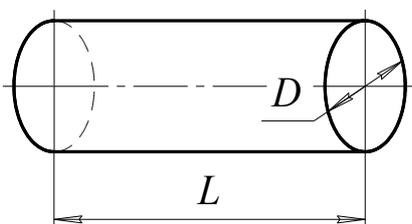
**T = 4**  
бесконечный стержень



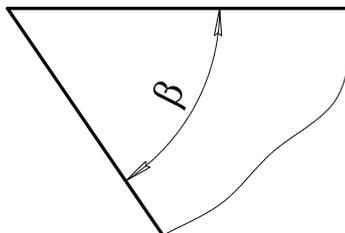
**T = 5**  
полуограниченный стержень



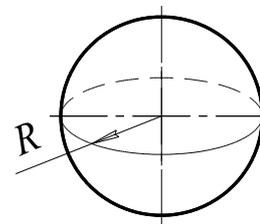
**T = 6**  
стержень конечной длины



**T = 7**  
цилиндр



**T = 8**  
бесконечный клин

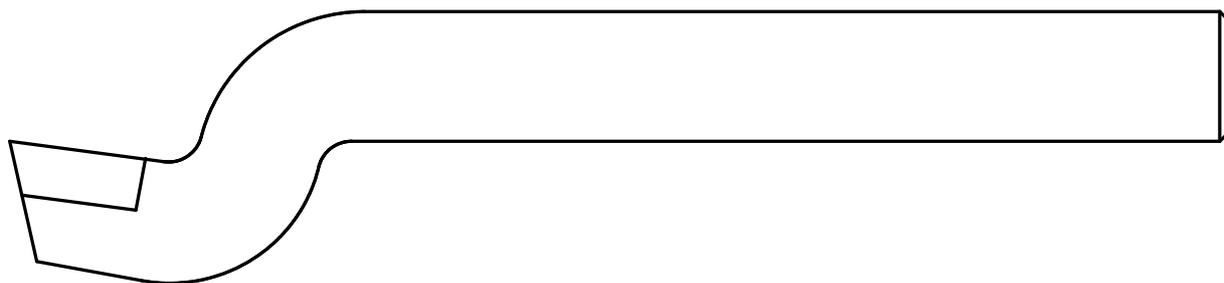


**T = 9**  
шар

**Рис. 2.6. Форма твердых тел**

Граничные *условия* на поверхностях твёрдого тела:

$$y = \begin{cases} 1 - \text{ГУ} - 1 \\ 2 - \text{ГУ} - 2 \\ 3 - \text{ГУ} - 3 \\ 4 - \text{ГУ} - 4 \end{cases}$$



**Рис. 2.7. К понятию пассивной/активной границы**